

Study with Olena

Математика для вступного іспиту в Studienkolleg

Збірник вправ з розв'язками: 203 завдань з 29 тем.

Умови завдань німецькою, як на іспиті. Розв'язки і пояснення українською.

Видання 2026. Безкоштовно для підготовки. www.study-with-olena.com

Як працювати зі збірником

Вступний іспит з математики до Studienkolleg перевіряє шкільну програму, переважно 9–11 класу. Що саме входить, залежить від колегу: дати і зміст іспиту по 24 колегам є на сайті study-with-olena.com/studienkolleg/vstupni-ispyty/.

Розв'язуйте завдання письмово, без калькулятора, і лише потім звіряйтеся з відповідями в кінці збірника. Якщо тема дається важко, повторіть її в онлайн-тренажері: study-with-olena.com/studienkolleg/matematyka/.

Частина 3 містить також похідні та інтеграли. У частині колегів ці теми на вступному іспиті не перевіряють (наприклад, у Карлсруе інтегральне числення не входить), тому уточнюйте вимоги свого колегу.

Слова, які трапляються в умовах

Vereinfache / Fasse zusammen	спростіть / зведіть
Löse	розв'яжіть
Berechne	обчисліть
Faktorisiere / Klammere aus	розкладіть на множники / винесіть за дужки
Kürze	скоротіть
Multipliziere aus	розкрийте дужки
Mache den Nenner rational	позбудьтеся кореня в знаменнику
Dividiere	поділіть
Bestimme	визначте
Gleichung, Ungleichung	рівняння, нерівність
Lösungsmenge L, $\emptyset$	множина розв'язків, порожня множина
Nullstelle, Schnittpunkt	нуль функції, точка перетину
Steigung, Scheitelpunkt	кутовий коефіцієнт, вершина параболи
Ableitung, Stammfunktion	похідна, первісна
Flächeninhalt, Umfang, Volumen, Oberfläche	площа, периметр, об'єм, площа поверхні
Betrag, Skalarprodukt	модуль (довжина), скалярний добуток

Зміст

1. Дії з виразами	Rechnen mit Termen
2. Розкладання на множники (винесення за дужки)	Faktorisieren (Ausklammern)
3. Формули скороченого множення	Binomische Formeln
4. Дроби	Bruchrechnung

5. Степені	Potenzen
6. Корені	Wurzelrechnung
7. Логарифми	Logarithmen
8. Ділення многочленів	Polynomdivision
9. Множини	Mengenlehre
10. Числові множини	Zahlenmengen
11. Лінійні рівняння	Lineare Gleichungen
12. Рівняння з модулем	Betragsgleichungen
13. Системи лінійних рівнянь	Lineare Gleichungssysteme
14. Текстові задачі	Textaufgaben
15. Квадратні рівняння	Quadratische Gleichungen
16. Рівняння вищих степенів	Polynomgleichungen
17. Показникові рівняння	Exponentialgleichungen
18. Логарифмічні рівняння	Logarithmusgleichungen
19. Нерівності	Ungleichungen
20. Нерівності з модулем	Betragsungleichungen
21. Лінійні функції	Lineare Funktionen
22. Квадратичні функції	Quadratische Funktionen
23. Степеневі функції	Potenzfunktionen
24. Показникові та логарифмічні функції	Exponential- und Logarithmusfunktionen
25. Вектори	Vektoren
26. Площі та периметри	Flächen und Umfänge
27. Геометричні тіла	Körper
28. Похідні	Ableitungen
29. Інтеграли	Integralrechnung
Відповіді та розв'язки	

Частина 1

Вирази, степені, корені, множини

1. Дії з виразами

Rechnen mit Termen

1.1 Fasse zusammen: $4a + 7b - 2a + 3b - a$

1.2 Fasse zusammen: $5xy - 3x + 8y - 2xy + 6x - 5y$

1.3 Fasse zusammen: $\frac{3}{2} \cdot a - \frac{1}{4} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a + \frac{3}{4} \cdot b$

1.4 Vereinfache: $3(2x - 5) - 2(x - 4)$

1.5 Vereinfache: $x(x + 3) - (x - 2)(x + 1)$

1.6 Vereinfache: $2a(3a - b) + b(a - 4b)$

1.7 Vereinfache: $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

2. Розкладання на множники (винесення за дужки)

Faktorisieren (Ausklammern)

2.1 Klammere den gemeinsamen Faktor aus: $6x^3 - 9x^2 + 3x$

2.2 Klammere den gemeinsamen Faktor aus: $12a^2b - 8ab^2$

2.3 Klammere den gemeinsamen Faktor aus: $15x^4 + 10x^2$

2.4 Klammere den gemeinsamen Faktor aus: $7ax - 14a + 21a^2$

2.5 Faktorisiere: $ax - 2a + 3x - 6$

2.6 Faktorisiere: $xy + 5x - 2y - 10$

2.7 Faktorisiere: $x^2 + 7x + 12$

3. Формули скороченого множення

Binomische Formeln

3.1 Multipliziere aus: $(2x + 5)^2$

3.2 Multipliziere aus: $(3a - 4b)^2$

3.3 Multipliziere aus: $(5y + 2)(5y - 2)$

3.4 Multipliziere aus: $(x/2 - 6)^2$

3.5 Faktorisiere mit einer binomischen Formel: $49x^2 - 25$

3.6 Faktorisiere mit einer binomischen Formel: $x^2 - 12x + 36$

3.7 Faktorisiere mit einer binomischen Formel: $16a^2 + 40ab + 25b^2$

4. Дроби

Bruchrechnung

4.1 Berechne: $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

4.2 Berechne: $(\frac{2}{3} : \frac{4}{9}) \cdot \frac{5}{2}$

4.3 Kürze: $(x^2 - 9)/(x^2 + 6x + 9)$

4.4 Kürze: $(4a^2 - 4a)/(2a^2 - 2)$

4.5 Fasse zusammen: $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$

4.6 Fasse zusammen: $\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4}$

4.7 Vereinfache: $(x^2 - 1)/(3x) \cdot 6x^2/(x + 1)$

5. Степені

Potenzen

5.1 Vereinfache: $a^5 \cdot a^{-2} \cdot a^4$

5.2 Vereinfache: $x^7 : x^{10}$

5.3 Vereinfache: $(2a^3b)^2 \cdot 3ab^{-4}$

5.4 Vereinfache: $(x^2y^{-1})^3 / (x^4y^{-2})$

5.5 Berechne: $2^{-3} \cdot 4^2$

5.6 Berechne: $8^{2/3}$

5.7 Berechne: $16^{-3/4}$

6. Корені

Wurzelrechnung

6.1 Vereinfache: $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8}$

6.2 Vereinfache: $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

6.3 Vereinfache: $2\sqrt{27} - \sqrt{48}$

6.4 Vereinfache: $\sqrt{(5/49)}$

6.5 Mache den Nenner rational: $6/\sqrt{3}$

6.6 Mache den Nenner rational: $4/(\sqrt{5} - 1)$

6.7 Vereinfache für $x, y \geq 0$: $\sqrt{(x^4y^2)} \cdot \sqrt{(x^2)}$

7. Логарифми

Logarithmen

7.1 Berechne ohne Taschenrechner: $\log_2 32$

- 7.2 Berechne ohne Taschenrechner: $\log_3 (1/9)$
- 7.3 Berechne ohne Taschenrechner: $\lg 1000$
- 7.4 Berechne ohne Taschenrechner: $\log_4 2$
- 7.5 Berechne ohne Taschenrechner: $\log_2 8 + \log_2 4$
- 7.6 Berechne ohne Taschenrechner: $\log_5 250 - \log_5 2$
- 7.7 Berechne ohne Taschenrechner: $2 \cdot \log_3 9 - \log_3 27$

8. Ділення многочленів

Polynomdivision

- 8.1 Dividiere: $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$
- 8.2 Dividiere: $(x^3 + 5x^2 + 5x - 2) : (x + 2)$
- 8.3 Dividiere: $(2x^3 - 5x^2 + x - 12) : (x - 3)$
- 8.4 Dividiere: $(2x^3 + x^2 - 8x - 4) : (2x + 1)$
- 8.5 Dividiere: $(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + 1)$
- 8.6 Dividiere: $(x^3 - 3x + 3) : (x - 2)$
- 8.7 Dividiere: $(3x^3 + 2x^2 - x - 4) : (x + 1)$

9. Множини

Mengenlehre

- 9.1 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Bestimme $A \cap B$.
- 9.2 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Bestimme $A \cup B$.
- 9.3 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Bestimme $A \setminus B$.
- 9.4 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Bestimme $B \setminus C$.
- 9.5 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Bestimme $(A \cup B) \cap C$.
- 9.6 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Bestimme die symmetrische Differenz $A \Delta B$.
- 9.7 Wie viele Elemente hat $A \times B$, wenn $|A| = 5$ und $|B| = 4$?

10. Числові множини

Zahlenmengen

- 10.1 Zu welcher kleinsten Zahlenmenge ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) gehört -7 ?
- 10.2 Zu welcher kleinsten Zahlenmenge ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) gehört $0,375$?
- 10.3 Zu welcher kleinsten Zahlenmenge ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) gehört $\sqrt{2}$?

- 10.4 Zu welcher kleinsten Zahlenmenge ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) gehört $\sqrt{49}$?
- 10.5 Zu welcher kleinsten Zahlenmenge ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) gehört $-5/3$?
- 10.6 Zu welcher kleinsten Zahlenmenge ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) gehört $0,333\dots$ (Periode 3)?
- 10.7 Schreibe als Intervall: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 5\}$

Частина 2

Рівняння і нерівності

11. Лінійні рівняння

Lineare Gleichungen

11.1 Löse: $7x - 4 = 3x + 16$

11.2 Löse: $5(x - 2) = 2(x + 7)$

11.3 Löse: $x/3 + 2 = x/2 - 1$

11.4 Löse: $4 - 2(3x - 1) = 3(2 - x)$

11.5 Löse: $(x + 2)^2 = (x - 4)^2$

11.6 Löse: $3/(x - 2) = 2/(x + 1)$

11.7 Löse: $(2x - 1)/4 - (x + 3)/6 = 1$

12. Рівняння з модулем

Betragsgleichungen

12.1 Löse: $|x - 3| = 5$

12.2 Löse: $|2x + 1| = 7$

12.3 Löse: $|x + 4| = -2$

12.4 Löse: $|3x - 6| = 0$

12.5 Löse: $|2x - 1| = x + 4$

12.6 Löse: $|x + 1| = |2x - 4|$

12.7 Löse: $|x - 2| = 3x + 2$

13. Системи лінійних рівнянь

Lineare Gleichungssysteme

13.1 Löse das Gleichungssystem: $x + y = 9$; $x - y = 3$

13.2 Löse das Gleichungssystem: $2x + 3y = 13$; $x - y = -1$

13.3 Löse das Gleichungssystem: $3x - 2y = 4$; $5x + 2y = 28$

13.4 Löse das Gleichungssystem: $4x + y = 11$; $2x + 3y = 13$

13.5 Löse das Gleichungssystem: $x/2 + y/3 = 4$; $x - y = 3$

13.6 Löse das Gleichungssystem: $x + y + z = 6$; $x - y + z = 2$; $2x + y - z = 1$

13.7 Löse das Gleichungssystem: $x + 2y - z = 2$; $2x - y + z = 3$; $x + y + z = 6$

14. Текстові задачі

Textaufgaben

- 14.1 Ein Rechteck ist 4 cm länger als breit. Sein Umfang beträgt 36 cm. Wie lang sind die Seiten?
- 14.2 Die Summe zweier Zahlen ist 50, ihre Differenz 14. Wie heißen die Zahlen?
- 14.3 Eine Mutter ist heute dreimal so alt wie ihr Sohn. In 12 Jahren ist sie doppelt so alt wie er. Wie alt sind beide heute?
- 14.4 Nach einem Rabatt von 20 % kostet ein Buch 64 €. Wie viel kostete es vorher?
- 14.5 3 kg Kaffee zu 12 €/kg werden mit einer zweiten Sorte zu 8 €/kg gemischt. Die Mischung soll 9,50 €/kg kosten. Wie viel kg der zweiten Sorte braucht man?
- 14.6 Zwei Radfahrer starten gleichzeitig in zwei Orten, die 120 km voneinander entfernt sind, und fahren aufeinander zu: mit 25 km/h und 35 km/h. Nach wie vielen Stunden treffen sie sich?
- 14.7 Ein Kapital von 2000 € wird zwei Jahre lang mit 3 % pro Jahr verzinst (Zinseszins). Wie hoch ist das Kapital danach?

15. Квадратні рівняння

Quadratische Gleichungen

- 15.1 Löse: $x^2 - 7x + 10 = 0$
- 15.2 Löse: $x^2 + 2x - 15 = 0$
- 15.3 Löse: $2x^2 - 5x - 3 = 0$
- 15.4 Löse: $x^2 - 10x + 25 = 0$
- 15.5 Löse: $x^2 + 4x + 7 = 0$
- 15.6 Löse: $3x^2 - 12x = 0$
- 15.7 Löse: $x^2 - 4x + 1 = 0$

16. Рівняння вищих степенів

Polynomgleichungen

- 16.1 Löse in $\mathbb{R}$: $x^3 - 4x = 0$
- 16.2 Löse in $\mathbb{R}$: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
- 16.3 Löse in $\mathbb{R}$: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- 16.4 Löse in $\mathbb{R}$: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
- 16.5 Löse in $\mathbb{R}$: $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
- 16.6 Löse in $\mathbb{R}$: $2x^3 - 8x^2 = 0$
- 16.7 Löse in $\mathbb{R}$: $x^3 - 27 = 0$

17. Показникові рівняння

Exponentialgleichungen

17.1 Löse: $2^{(x+1)} = 32$

17.2 Löse: $3^{(2x-1)} = 27$

17.3 Löse: $5^x = 1/125$

17.4 Löse: $9^x = 3^{(x+4)}$

17.5 Löse: $4^x = 8$

17.6 Löse: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

17.7 Löse und runde auf drei Nachkommastellen: $3^x = 7$

18. Логарифмічні рівняння

Logarithmusgleichungen

18.1 Löse: $\log_2 (x+3) = 4$

18.2 Löse: $\log_3 (2x-1) = 2$

18.3 Löse: $\ln x = 2$

18.4 Löse: $\lg x + \lg (x-3) = 1$

18.5 Löse: $\log_5 x + \log_5 (x+4) = 1$

18.6 Löse: $2 \cdot \log_3 x = \log_3 (2x+3)$

18.7 Löse: $\log_2 (x^2 - 7) = 1$

19. Нерівності

Ungleichungen

19.1 Löse: $3x - 5 > 2x + 1$

19.2 Löse: $-2x + 4 \leq 10$

19.3 Löse: $x^2 - 5x + 6 < 0$

19.4 Löse: $x^2 - x - 12 \geq 0$

19.5 Löse: $(x-1)/(x+2) > 0$

19.6 Löse: $(x+3)(x-1)(x-4) \leq 0$

19.7 Löse: $x^2 + 2x + 5 > 0$

20. Нерівності з модулем

Betragsungleichungen

20.1 Löse: $|x-2| < 5$

20.2 Löse: $|2x + 1| \geq 3$

20.3 Löse: $|4 - x| \leq 2$

20.4 Löse: $|3x - 6| \leq 0$

20.5 Löse: $|x + 4| > -1$

20.6 Löse: $|x - 1| < |x + 3|$

20.7 Löse: $1 \leq |x - 2| \leq 4$

Частина 3

Функції, геометрія, похідні та інтеграли

21. Лінійні функції

Lineare Funktionen

- 21.1 Bestimme die Gleichung der Geraden durch $P(1; 3)$ und $Q(3; 7)$.
- 21.2 Bestimme Steigung und y-Achsenabschnitt von $2y - 4x = 6$.
- 21.3 Bestimme die Nullstelle von $f(x) = -3x + 9$.
- 21.4 Bestimme den Schnittpunkt von $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = -x + 5$.
- 21.5 Bestimme die Gerade, die parallel zu $y = 3x - 4$ ist und durch $P(2; 1)$ geht.
- 21.6 Bestimme die Gerade durch den Ursprung, die senkrecht zu $y = 2x + 1$ steht.
- 21.7 Liegt der Punkt $P(4; 5)$ auf der Geraden $y = 1,5x - 1$?

22. Квадратичні функції

Quadratische Funktionen

- 22.1 Bestimme den Scheitelpunkt von $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
- 22.2 Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2x - 8$.
- 22.3 Schreibe $f(x) = 2x^2 + 8x + 3$ in Scheitelpunktform.
- 22.4 Bestimme die Schnittpunkte der Parabel $y = x^2$ mit der Geraden $y = x + 2$.
- 22.5 Bestimme die Nullstellen von $f(x) = -(x - 1)^2 + 4$.
- 22.6 Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat die Nullstellen 1 und 5. Bestimme ihre Gleichung.
- 22.7 Für welches c berührt die Parabel $y = x^2 + 4x + c$ die x-Achse?

23. Степеневі функції

Potenzfunktionen

- 23.1 Welche Symmetrie hat der Graph von $f(x) = x^3$?
- 23.2 Welche Symmetrie hat der Graph von $f(x) = x^4 - 2x^2$?
- 23.3 Gib Definitions- und Wertemenge von $f(x) = x^{-2}$ an.
- 23.4 Berechne $f(2)$ für $f(x) = 3x^{-1}$.
- 23.5 Der Graph von $f(x) = a \cdot x^3$ geht durch $P(2; -16)$. Bestimme a .

23.6 Löse in $\mathbb{R}$: $x^3 = -27$

23.7 Löse: $x^{1/2} = 5$

24. Показникові та логарифмічні функції

Exponential- und Logarithmusfunktionen

24.1 Berechne $f(3)$ und $f(-2)$ für $f(x) = 2^x$.

24.2 Welche waagerechte Asymptote hat $f(x) = 3^x + 1$?

24.3 Bestimme die Nullstelle von $g(x) = \log_2 x$.

24.4 Bestimme die Definitionsmenge von $f(x) = \log_3 (x - 2)$.

24.5 Eine Funktion $f(x) = a \cdot b^x$ geht durch $(0; 3)$ und $(1; 6)$. Bestimme a und b .

24.6 Für eine Menge gilt $N(t) = 800 \cdot 0,5^t$ (t in Stunden). Berechne $N(3)$.

24.7 Bestimme die Umkehrfunktion von $f(x) = 2^x$.

25. Вектори

Vektoren

25.1 $a = (2; -1; 3)$, $b = (1; 4; -2)$. Berechne $a + b$.

25.2 $a = (2; -1; 3)$, $b = (1; 4; -2)$. Berechne $3a - 2b$.

25.3 Berechne den Betrag von $v = (2; -1; 2)$.

25.4 $a = (2; -1; 3)$, $b = (1; 4; -2)$. Berechne das Skalarprodukt $a \cdot b$.

25.5 Sind $u = (3; -2; 1)$ und $w = (2; 4; 2)$ orthogonal?

25.6 Bestimme den Vektor $\overrightarrow{AB}$ für $A(1; 2; 3)$ und $B(4; 0; 5)$.

25.7 Bestimme den Mittelpunkt der Strecke AB für $A(1; 2; 3)$ und $B(4; 0; 5)$.

26. Площі та периметри

Flächen und Umfänge

26.1 Ein Rechteck ist 8 cm lang und 5 cm breit. Berechne Flächeninhalt und Umfang.

26.2 Ein Kreis hat den Radius $r = 3$ cm. Berechne Flächeninhalt und Umfang.

26.3 Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten 6 cm und 8 cm. Berechne Hypotenuse und Flächeninhalt.

26.4 Ein Trapez hat die parallelen Seiten $a = 10$ cm und $c = 6$ cm und die Höhe $h = 4$ cm. Berechne den Flächeninhalt.

26.5 Die Diagonale eines Quadrats ist $6\sqrt{2}$ cm lang. Berechne Seitenlänge und Flächeninhalt.

26.6 Ein Kreisring hat den Außenradius 5 cm und den Innenradius 3 cm. Berechne seinen Flächeninhalt.

26.7 Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seitenlänge 4 cm. Berechne Höhe und Flächeninhalt.

27. Геометричні тіла

Körper

27.1 Ein Würfel hat die Kantenlänge 4 cm. Berechne Volumen und Oberfläche.

27.2 Ein Quader ist 3 cm, 4 cm und 5 cm lang. Berechne Volumen und Oberfläche.

27.3 Berechne die Länge der Raumdiagonale eines Quaders mit den Kanten 2 cm, 3 cm und 6 cm.

27.4 Ein Zylinder hat $r = 2$ cm und $h = 5$ cm. Berechne Volumen und Oberfläche.

27.5 Ein Kegel hat $r = 3$ cm und $h = 4$ cm. Berechne Mantellinie und Volumen.

27.6 Eine Kugel hat den Radius 3 cm. Berechne Volumen und Oberfläche.

27.7 Eine quadratische Pyramide hat die Grundkante 6 cm und die Höhe 4 cm. Berechne ihr Volumen.

28. Похідні

Ableitungen

28.1 Bilde die Ableitung: $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$

28.2 Bilde die Ableitung: $f(x) = (2x + 1)^3$

28.3 Bilde die Ableitung: $f(x) = x \cdot e^x$

28.4 Bilde die Ableitung: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

28.5 Bilde die Ableitung: $f(x) = \sqrt{x}$

28.6 Bestimme die Tangente an $f(x) = x^2$ im Punkt $x = 3$.

28.7 Bestimme die Extrempunkte von $f(x) = x^3 - 3x$.

29. Інтеграли

Integralrechnung

29.1 Bestimme die Stammfunktion: $\int (3x^2 + 2x) dx$

29.2 Bestimme die Stammfunktion: $\int (4x^3 - 6x) dx$

29.3 Bestimme die Stammfunktion: $\int e^{(2x)} dx$

29.4 Berechne: $\int_0^2 x^2 dx$

29.5 Berechne: $\int_1^e 1/x dx$

29.6 Berechne: $\int_0^\pi \sin x dx$

29.7 Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = -x^2 + 4$ und der x-Achse.

Відповіді

Відповіді та розв'язки

1. Дії з виразами

1.1 $a + 10b$

Зведіть доданки з a і доданки з b окремо.

1.2 $3xy + 3x + 3y$

Зведіть окремо доданки з xy , з x і з y .

1.3 $2a + b/2$

Зведіть доданки з a і з b , дроби додавайте зі спільним знаменником.

1.4 $4x - 7$

Розкрийте дужки: $6x - 15 - 2x + 8$, потім зведіть подібні.

1.5 $4x + 2$

Перемножте дужки: $x^2 + 3x - (x^2 - x - 2) = 4x + 2$.

1.6 $6a^2 - ab - 4b^2$

Розкрийте дужки: $6a^2 - 2ab + ab - 4b^2$, потім зведіть.

1.7 $x^3 + 8$

Помножте кожен доданок першої дужки на кожен доданок другої.

2. Розкладання на множники (винесення за дужки)

2.1 $3x(2x^2 - 3x + 1)$

Спільний множник $3x$.

2.2 $4ab(3a - 2b)$

Спільний множник $4ab$.

2.3 $5x^2(3x^2 + 2)$

Спільний множник $5x^2$.

2.4 $7a(x - 2 + 3a)$

Спільний множник $7a$.

2.5 $(x - 2)(a + 3)$

Згрупуйте: $a(x - 2) + 3(x - 2)$, потім винесіть $(x - 2)$.

2.6 $(x - 2)(y + 5)$

Згрупуйте: $x(y + 5) - 2(y + 5)$.

2.7 $(x + 3)(x + 4)$

Шукаємо два числа з сумою 7 і добутком 12: 3 і 4.

3. Формули скороченого множення

3.1 $4x^2 + 20x + 25$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2: 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 25.$$

3.2 $9a^2 - 24ab + 16b^2$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2: 9a^2 - 24ab + 16b^2.$$

3.3 $25y^2 - 4$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

3.4 $x^2/4 - 6x + 36$

$$(a - b)^2: x^2/4 - 2 \cdot (x/2) \cdot 6 + 36.$$

3.5 $(7x - 5)(7x + 5)$

$$\text{Різниця квадратів: } (7x)^2 - 5^2.$$

3.6 $(x - 6)^2$

$$\text{Повний квадрат: } x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2.$$

3.7 $(4a + 5b)^2$

$$\text{Повний квадрат: } (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 5b + (5b)^2.$$

4. Дроби

4.1 $5/4$

$$\text{Спільний знаменник 12: } 9/12 + 10/12 - 4/12 = 15/12 = 5/4.$$

4.2 $15/4$

$$\text{Ділення: множимо на обернений дріб, } 2/3 \cdot 9/4 = 3/2, \text{ потім } 3/2 \cdot 5/2 = 15/4.$$

4.3 $(x - 3)/(x + 3)$

$$\text{Чисельник } (x + 3)(x - 3), \text{ знаменник } (x + 3)^2. \text{ Скоротить на } (x + 3).$$

4.4 $2a/(a + 1)$

$$\text{Чисельник } 4a(a - 1), \text{ знаменник } 2(a - 1)(a + 1). \text{ Скоротить на } 2(a - 1).$$

4.5 $(5x - 1)/((x + 1)(x - 1))$

$$\text{Спільний знаменник } (x - 1)(x + 1): 2(x + 1) + 3(x - 1) = 5x - 1.$$

4.6 $(x + 4)/(x + 2)$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2). \text{ Чисельник: } x(x + 2) - 8 = x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2), \text{ скоротить на } (x - 2).$$

4.7 $2x(x - 1)$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1). \text{ Скоротить на } (x + 1) \text{ і на } 3x.$$

5. Степені

5.1 a^7

$$\text{При множенні показники додаються: } 5 - 2 + 4 = 7.$$

5.2 $1/x^3$

$$\text{При діленні показники віднімаються: } 7 - 10 = -3.$$

5.3 $12a^7/b^2$

$$(2a^3b)^2 = 4a^6b^2. \text{ Помножте: } 12a^7b^{-2}.$$

5.4 x^2/y

$(x^2y^{-1})^3 = x^6y^{-3}$. Поділіть: x^2y^{-1} .

5.5 2

$2^{-3} = 1/8$, $4^2 = 16$, $16/8 = 2$.

5.6 4

Кубічний корінь з 8 дорівнює 2, $2^2 = 4$.

5.7 1/8

Корінь четвертого степеня з 16 дорівнює 2, $2^3 = 8$, від'ємний показник дає $1/8$.

6. Корені

6.1 $6\sqrt{2}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$: $5 + 3 - 2 = 6$.

6.2 6

$\sqrt{(12 \cdot 3)} = \sqrt{36}$.

6.3 $2\sqrt{3}$

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$: $6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$.

6.4 $\sqrt{5/7}$

$\sqrt{5}/\sqrt{49}$.

6.5 $2\sqrt{3}$

Помножте чисельник і знаменник на $\sqrt{3}$: $6\sqrt{3}/3$.

6.6 $1 + \sqrt{5}$

Помножте на $(\sqrt{5} + 1)$: знаменник $5 - 1 = 4$.

6.7 x^3y

$\sqrt{(x^4y^2)} = x^2y$, $\sqrt{(x^2)} = x$.

7. Логарифми

7.1 5

$2^5 = 32$.

7.2 -2

$1/9 = 3^{-2}$.

7.3 3

$10^3 = 1000$.

7.4 1/2

$4^{(1/2)} = 2$.

7.5 5

$3 + 2$, або $\log_2 32$.

7.6 3

$\log_5(250/2) = \log_5 125 = 3$.

10.2 $\mathbb{Q}$

$0,375 = 3/8$, скінченний десятковий дріб.

10.3 $\mathbb{R}$

$\sqrt{2}$ ірраціональне, його не можна записати дробом.

10.4 $\mathbb{N}$

$\sqrt{49} = 7$.

10.5 $\mathbb{Q}$

Дріб, не ціле число.

10.6 $\mathbb{Q}$

Періодичний дріб: $0,(3) = 1/3$.

10.7 $(-2; 5]$

Ліва межа не входить (кругла дужка), права входить (квадратна).

11. Лінійні рівняння

11.1 $L = \{5\}$

Перенесіть x ліворуч, числа праворуч: $4x = 20$.

11.2 $L = \{8\}$

Розкрийте дужки: $5x - 10 = 2x + 14$, $3x = 24$.

11.3 $L = \{18\}$

Помножте на 6: $2x + 12 = 3x - 6$.

11.4 $L = \{0\}$

$6 - 6x = 6 - 3x$, звідси $-3x = 0$.

11.5 $L = \{1\}$

x^2 скорочуються: $4x + 4 = -8x + 16$, $12x = 12$.

11.6 $L = \{-7\}$

ОДЗ: $x \neq 2$, $x \neq -1$. Перехресне множення: $3(x + 1) = 2(x - 2)$.

11.7 $L = \{21/4\}$

Помножте на 12: $3(2x - 1) - 2(x + 3) = 12$, $4x - 9 = 12$.

12. Рівняння з модулем

12.1 $L = \{-2; 8\}$

$x - 3 = 5$ або $x - 3 = -5$.

12.2 $L = \{-4; 3\}$

$2x + 1 = 7$ або $2x + 1 = -7$.

12.3 $L = \emptyset$

Модуль не може бути від'ємним.

12.4 $L = \{2\}$

Модуль дорівнює нулю, лише коли вираз дорівнює нулю.

$$K = 2000 \cdot 1,03^2 = 2000 \cdot 1,0609.$$

15. Квадратні рівняння

15.1 $L = \{2; 5\}$

Віста: сума 7, добуток 10, тобто 2 і 5.

15.2 $L = \{-5; 3\}$

$$D = 4 + 60 = 64, x = (-2 \pm 8)/2.$$

15.3 $L = \{-1/2; 3\}$

$$D = 25 + 24 = 49, x = (5 \pm 7)/4.$$

15.4 $L = \{5\}$

Повний квадрат $(x - 5)^2 = 0$, один корінь.

15.5 $L = \emptyset$

$$D = 16 - 28 < 0, \text{ дійсних коренів немає.}$$

15.6 $L = \{0; 4\}$

Винесіть $3x$: $3x(x - 4) = 0$.

15.7 $L = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$

$$D = 16 - 4 = 12, x = (4 \pm 2\sqrt{3})/2.$$

16. Рівняння вищих степенів

16.1 $L = \{-2; 0; 2\}$

Винесіть x : $x(x^2 - 4) = 0$.

16.2 $L = \{-3; -2; 2; 3\}$

Заміна $u = x^2$: $u^2 - 13u + 36 = 0$, $u = 4$ або $u = 9$.

16.3 $L = \{-2; -1; 1; 2\}$

Заміна $u = x^2$: $u = 1$ або $u = 4$.

16.4 $L = \{1; 2; 3\}$

Вгадайте корінь $x = 1$, поділіть на $(x - 1)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

16.5 $L = \{-2; -1; 2\}$

Групування: $x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4)$.

16.6 $L = \{0; 4\}$

Винесіть $2x^2$: $2x^2(x - 4) = 0$.

16.7 $L = \{3\}$

$x^3 = 27$, дійсний корінь $x = 3$.

17. Показникові рівняння

17.1 $L = \{4\}$

$32 = 2^5$, отже $x + 1 = 5$.

17.2 $L = \{2\}$

$$27 = 3^3: 2x - 1 = 3.$$

17.3 $L = \{-3\}$

$$1/125 = 5^{-3}.$$

17.4 $L = \{4\}$

$$3^{(2x)} = 3^{(x+4)}: 2x = x + 4.$$

17.5 $L = \{3/2\}$

Запишіть через основу 2: $2^{(2x)} = 2^3, 2x = 3.$

17.6 $L = \{1; 2\}$

Заміна $u = 2^x$: $u^2 - 6u + 8 = 0, u = 2$ або $u = 4.$

17.7 $x = \log_3 7 = \ln 7 / \ln 3 \approx 1,771$

Логарифмуйте обидві частини: $x = \ln 7 / \ln 3.$

18. Логарифмічні рівняння

18.1 $L = \{13\}$

$$x + 3 = 2^4 = 16.$$

18.2 $L = \{5\}$

$$2x - 1 = 3^2 = 9.$$

18.3 $L = \{e^2\}$

$$x = e^2.$$

18.4 $L = \{5\}$

$$\lg(x(x-3)) = 1, x^2 - 3x - 10 = 0, x = 5 \text{ або } x = -2. \text{ ОДЗ } x > 3, \text{ тому лише } 5.$$

18.5 $L = \{1\}$

$$x(x+4) = 5, x = 1 \text{ або } x = -5. \text{ ОДЗ } x > 0.$$

18.6 $L = \{3\}$

$$x^2 = 2x + 3, x = 3 \text{ або } x = -1. \text{ ОДЗ } x > 0.$$

18.7 $L = \{-3; 3\}$

$$x^2 - 7 = 2, x^2 = 9. \text{ Обидва корені входять в ОДЗ.}$$

19. Нерівності

19.1 $L = (6; +\infty)$

Перенесіть x ліворуч: $x > 6.$

19.2 $L = [-3; +\infty)$

$$-2x \leq 6. \text{ При діленні на від'ємне число знак змінюється: } x \geq -3.$$

19.3 $L = (2; 3)$

Нулі 2 і 3, вітки параболи вгору: між нулями вираз від'ємний.

19.4 $L = (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$

Нулі -3 і 4, вираз невід'ємний зовні проміжку між нулями.

19.5 $L = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

Метод інтервалів з точками -2 і 1 ; $x = -2$ не входить в ОДЗ.

19.6 $L = (-\infty; -3] \cup [1; 4]$

Метод інтервалів з нулями -3 , 1 , 4 .

19.7 $L = \mathbb{R}$

$D < 0$ і вітки вгору: вираз завжди додатний.

20. Нерівності з модулем

20.1 $L = (-3; 7)$

$$-5 < x - 2 < 5.$$

20.2 $L = (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

$$2x + 1 \geq 3 \text{ або } 2x + 1 \leq -3.$$

20.3 $L = [2; 6]$

$$-2 \leq 4 - x \leq 2.$$

20.4 $L = \{2\}$

Модуль не менший за нуль, тому лише $3x - 6 = 0$.

20.5 $L = \mathbb{R}$

Модуль завжди більший за -1 .

20.6 $L = (-1; +\infty)$

Піднесіть до квадрата: $x^2 - 2x + 1 < x^2 + 6x + 9$, $-8 < 8x$.

20.7 $L = [-2; 1] \cup [3; 6]$

Розв'яжіть $|x - 2| \geq 1$ і $|x - 2| \leq 4$ окремо і візьміть перетин.

21. Лінійні функції

21.1 $y = 2x + 1$

$$m = (7 - 3)/(3 - 1) = 2, b = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$$

21.2 $m = 2, b = 3$

Розв'яжіть відносно y : $y = 2x + 3$.

21.3 $x = 3$

$$-3x + 9 = 0.$$

21.4 $S(2; 3)$

$$2x - 1 = -x + 5, 3x = 6.$$

21.5 $y = 3x - 5$

Паралельна пряма має той самий $m = 3$: $1 = 3 \cdot 2 + b$, $b = -5$.

21.6 $y = -x/2$

Для перпендикулярних прямих $m_1 \cdot m_2 = -1$, тому $m = -1/2$.

21.7 ja

$$1,5 \cdot 4 - 1 = 5.$$

24.3 $x = 1$

$\log_2 1 = 0.$

24.4 $D = (2; +\infty)$

Аргумент логарифма має бути додатним: $x - 2 > 0.$

24.5 $a = 3, b = 2; f(x) = 3 \cdot 2^x$

$f(0) = a = 3, f(1) = 3b = 6.$

24.6 100

$800 \cdot 0,125.$

24.7 $f^{-1}(x) = \log_2 x$

$y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y.$

25. Вектори

25.1 $(3; 3; 1)$

Додавайте по координатно.

25.2 $(4; -11; 13)$

$3a = (6; -3; 9), 2b = (2; 8; -4),$ відніміть по координатно.

25.3 $|v| = 3$

$\sqrt{(4 + 1 + 4)} = \sqrt{9}.$

25.4 -8

$2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 2 - 4 - 6.$

25.5 $j a, u \cdot w = 0$

$3 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 0.$

25.6 $(3; -2; 2)$

Від координат кінця відніміть координати початку.

25.7 $M(2,5; 1; 4)$

Середнє арифметичне координат.

26. Площі та периметри

26.1 $A = 40 \text{ cm}^2, u = 26 \text{ cm}$

$A = 8 \cdot 5, u = 2(8 + 5).$

26.2 $A = 9\pi \approx 28,27 \text{ cm}^2, u = 6\pi \approx 18,85 \text{ cm}$

$A = \pi r^2, u = 2\pi r.$

26.3 $c = 10 \text{ cm}, A = 24 \text{ cm}^2$

Піфагор: $c^2 = 36 + 64 = 100. A = 6 \cdot 8/2.$

26.4 $A = 32 \text{ cm}^2$

$A = (a + c)/2 \cdot h = 8 \cdot 4.$

26.5 $a = 6 \text{ cm}, A = 36 \text{ cm}^2$

$d = a\sqrt{2},$ тому $a = 6.$

29.1 $x^3 + x^2 + C$

Первісна x^n дорівнює $x^{n+1}/(n + 1)$.

29.2 $x^4 - 3x^2 + C$

Почленно: $x^4 - 3x^2$.

29.3 $e^{2x}/2 + C$

Первісна $e^{(ax)}$ дорівнює $e^{(ax)}/a$.

29.4 $8/3$

$[x^3/3]$ від 0 до 2: $8/3$.

29.5 1

$[\ln x]$ від 1 до e : $1 - 0$.

29.6 2

$[-\cos x]$ від 0 до π : $1 + 1$.

29.7 $A = 32/3 \approx 10,67$

Нулі ± 2 . Інтеграл від -2 до 2: $[-x^3/3 + 4x] = 16/3 + 16/3$.